

## LAHENDUSED 12.KLASS

1. Vastus: Peetri kiirus on 150m/min ja Katja kiirus on 140m/min.

### Lahendus:

Olgu  $V_1$  on Peetri kiirus,

$V_2$  on Katja kiirus,

$t$  on sõiduaeg ja

$S$  on Katja kodu kaugus koolist.

$$tV_1 = S + 60$$

$$tV_2 = S,$$

kust  $tV_1 - tV_2 = 60$  ja  $t(V_1 - V_2) = 60$

$$\text{Samas: } \begin{cases} (V_1 + 30)(t - 1) = S + 60 \\ (V_2 + 28)(t - 1) = S \end{cases}$$

Lahutades esimesest võrrandist teise saame:

$$(t - 1)(V_1 + 30 - V_2 - 28) = 60$$

$$(t - 1)(V_1 - V_2 + 2) = 60$$

$$tV_1 - tV_2 + 2t - V_1 + V_2 - 2 = 60$$

kuna  $tV_1 - tV_2 = 60$ , siis  $2t - V_1 + V_2 = 2$

$$V_1 - V_2 = 2t - 2$$

Asendame võrrandisse  $t(V_1 - V_2) = 60$  ning saame:

$$t(2t - 2) = 60$$

$$t_1 = 6$$

$$t_2 = -5 \text{ (ei sobi, kuna aeg ei või negatiivne olla)}$$

$$\text{Samas: } \begin{cases} V_2 t = S \\ (V_2 + 28)(t - 1) = S \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2 t = S \\ V_2 t - V_2 + 28t - 28 = S \end{cases}$$

$$S - V_2 + 28t - 28 = S$$

$$V_2 = 28t - 28$$

Teades, et  $t = 6$ , saame  $V_2 = 28 \cdot 6 - 28 = 140$ ,

Ning  $V_1 = 150$

Peetri kiirus on 150m/min ja Katja kiirus on 140m/min.

**Hindamine:**

Leitud, et $t(V_1 - V_2) = 60$	1p
Leitud laste sõiduaeg	3p
Avaldatud Katja kiirus aja kaudu	2p
Leitud õige vastus	<u>1p</u>
	<b>7p</b>

Märkus: ainult õige vastuse eest anda 2p

## 2. Vastus: : 1 020 100

### Lahendus:

Olgu  $n^2 + 2021n = m^2$ , kus  $m$  on mingisugune naturaalarv. On ilmne, et  $m > n$ , mistõttu saame arvu  $m$  kirja panna kui  $m = n + k$ , kus  $k$  on mingisugune naturaalarv. Sellega jõuame võrduseni

$$n^2 + 2021n = (n + k)^2 \Rightarrow n^2 + 2021n = n^2 + 2nk + k^2,$$

millest

$$2021n = 2nk + k^2.$$

Avaldades viimase  $n$  suhtes, saame

$$n = \frac{k^2}{2021 - 2k}$$

Kuna selle murru lugeja on mis tahes naturaalarvu  $k$  korral alati positiivne, siis peab positiivne olema ka murru nimetaja. Sellest tulenevalt  $2021 - 2k > 0$ , millest  $k \leq 1010$ . Mida väiksem on murru nimetaja, seda suurem on  $n$  väärtus ise. Järelikult, kuna  $k = 1010$  korral on murru nimetaja vähim võimalik, siis on suurim võimalik otsitav  $n$  väärtus

$$n = \frac{1010^2}{2021 - 2 \cdot 1010} = 1010^2 = 1\,020\,100.$$

### Hindamine:

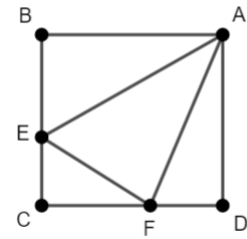
Võrrandi $n^2 + 2021n = m^2$ kirjapanek	1p
Tundmatu $m$ kirjapanek kui $m = n + k$	1p
Võrduse $n^2 + 2021n = (n + k)^2$ kirjapanek ning lihtsustamine	2p
Tundmatu $n$ avaldamine	1p
Tundmatu $k$ jaoks kitsenduse $k \leq 1010$ loomine ning sellest sobiva $k$ valimine	1p
Õige lõppvastus	1p
	<b>7p</b>

Märkus: Ainult õige vastuse eest anda 1p.

3. Vastus:  $S_{AEF} = 38$  (ruutühikut)

**Lahendus:**

Alustuseks tasub skitseerida joonis. Olgu  $|AD| = x$  (ruudu külge),  $|FD| = a$  ning  $|BE| = b$ . Teades kolme kolmnurga pindala, saame võrrandid:



$$\begin{cases} \frac{ax}{2} = 20 \\ \frac{bx}{2} = 30 \\ \frac{(x-a)(x-b)}{2} = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax = 40 \\ bx = 60 \\ (x-a)(x-b) = 24 \end{cases}$$

Selle võrrandisüsteemi lahendamisel saame esialgse ruudu küljepikkuse  $x$ . Selleks tuleb avaldada esimene võrand  $a$  suhtes, teine võrand  $b$  suhtes ning asendades need kolmandasse võrrandisse:

$$\left(x - \frac{40}{x}\right)\left(x - \frac{60}{x}\right) = 24.$$

Seda võrrandit saab tegurdada kujule

$$(x^2 - 100)(x^2 - 24) = 0,$$

millest positiivsed lahendid on  $x_1 = 10$  ning  $x_2 = \sqrt{24}$ . Et ruudu sees on kolm teadaoleva pindalaga kolmnurka, siis peab ruudu küljepikkus olema vähemalt  $\sqrt{20 + 30 + 12} = \sqrt{62}$ . Seega eelneva võrrandi põhjal on ruudu küljepikkuseks  $x = 10$ . Sellest tulenevalt on kolmnurga  $AEF$  pindala

$$\begin{aligned} S_{AEF} &= S_{ABCD} - S_{ABE} - S_{ADF} - S_{CEF} = \\ &= 10^2 - 30 - 20 - 12 = 38 \end{aligned}$$

ruutühikut.

**Hindamine:**

Võrrandisüsteemi koostamine	3p
Võrrandisüsteemi lahendamine	2p
Ruudu küljepikkuse leidmine	1p
Kolmnurga $AEF$ pindala leidmine	1p
	<b>7p</b>

Märkus: ainult õige vastuse eest anda 2p.

**4. Vastus: a) Ei ole võimalik; b) See arv on 693.**

**Lahendus:**

- a) Tahvlil on aritmeetiline jada, mille esimene liige  $a_1$  on vähim tahvlil olev arv ning jada vahe on  $d = 1$ . Selle jada summat arvutatakse valemist

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n \Rightarrow S_{2020} = (2a_1 + 2019) \cdot \frac{2020}{2}$$

Kuna on teada, et  $S_{2020} = 2137160$ , siis saame hõlpsasti kindlaks määrata, et

$$2a_1 + 2019 = 2116,$$

millest

$$a_1 = 48,5.$$

Kuna pole võimalik, et leitud arv oleks jada esimeseks liikmeks (tegemist pole naturaalarvuga!), siis pole võimalik, et tahvlil olevate arvude summa on 2137160.

- b) Olgu meil aritmeetilised jaded ( $a_n$ ), ( $b_n$ ) ja ( $c_n$ ), millest me leiame vastavalt 7, 11 ja 13 esimese liikme summa. Olgu toonitatud, et iga jada vahe  $d = 1$ .

$$S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6}{2} \cdot 7 = 7 \cdot (a_1 + 3)$$

$$S_9 = \frac{b_1 + b_9}{2} \cdot 9 = \frac{2b_1 + 8}{2} \cdot 9 = 9 \cdot (b_1 + 4)$$

$$S_{11} = \frac{c_1 + c_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{2c_1 + 10}{2} \cdot 11 = 11 \cdot (c_1 + 5)$$

Seega otsitav arv peab olema arvude 7, 11 ja 13 kordne. Kuna küsitakse vähimat sellistele tingimustele vastavat arvu, siis peame leidma vähima ühiskordse.

$$VÜK(7, 9, 11) = 693$$

**Hindamine:**

a)

Märkus, et tahvlil olevad arvud moodustavad aritmeetilise jada 1p

Aritmeetilise jada summa valemi kasutamine 2020 liikme jaoks(võrrandi koostamine) 1p

Põhjendamine, miks sellist summat tekkida ei saa 1p

b)

Summade kirjapanek: 1p

Põhjendamine, miks arv peab olema arvud 7, 11 ja 13 kordne 2p

Õige lõppvastus 1p

**7p**

Märkus: Ainult õige vastuse eest anda kummaski alapunktis 1p.

5. Vastus: a) See on võimatu. b) See on võimalik.

**Lahendus:**

a) Olgu  $12 \times 12$  kaberuudustik antud sellise koordinaatsüsteemiga nagu kõrvaloleval joonisel ning olgu algselt nupp ruudul A1. On ilmne, et ruudule L12 on võimalik saada ainult ruudult K11 liikudes. Seega viimane käik peab olema selline, millega nupp liigutatakse ruudule L12.

Ülejäänud ruudud on sellised, millele sisenetakse täpselt üks kord ning millelt väljutakse täpselt üks kord.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												

Vaatleme ruute C1 ning A3. Nendele on võimalik liikuda vastavalt ruutudelt B2 ja D2 ning B2 ja B4. On ilmne, et kui algselt on nupp ruudul A1, siis esimese käiguga tuleb see liigutada ruudule B2. Sõltumata järgmisest käigust (võimalikud variandid on  $B2 \rightarrow C1$ ,  $B2 \rightarrow C3$  ning  $B2 \rightarrow A3$ ) jääb vähemalt üks ruutudest C1 ja A3 tühjaks, kuid käigu järgselt on võimalik külastamata ruudule minna vaid ühte teed pidi. Kui ruudule saab siseneda vaid ühte teed pidi, siis on võimatu sellelt ruudult väljuda ehk ruut C1 või A3 oleks justkui viimase käigu sihtkoht. See on aga vastuolus eeldusega, et kõikide käikude tegemine lõppeb ruudul L12.

Seega sellisel viisil kõikide mustade ruutude külastamine on võimatu.

b) Selline käikude tegemise viis on nüüd võimalik. Olgu alguses nupp ruudul A1. Üks võimalikest sobivate käikude järjekorrast on järgnev:

$A1 \rightarrow B2 \rightarrow A3 \rightarrow B4 \rightarrow A5 \rightarrow B6 \rightarrow A7 \rightarrow B8 \rightarrow A9 \rightarrow B10 \rightarrow A11 \rightarrow B12 \rightarrow C11 \rightarrow$   
 $\rightarrow D12 \rightarrow E11 \rightarrow F12 \rightarrow G11 \rightarrow H12 \rightarrow I11 \rightarrow J12 \rightarrow K11 \rightarrow L12 \rightarrow J10 \rightarrow I9 \rightarrow H10 \rightarrow$   
 $\rightarrow G9 \rightarrow F10 \rightarrow E9 \rightarrow D10 \rightarrow C9 \rightarrow E7 \rightarrow D8 \rightarrow C7 \rightarrow E5 \rightarrow D6 \rightarrow C5 \rightarrow D4 \rightarrow C3 \rightarrow$   
 $\rightarrow E1 \rightarrow D2 \rightarrow C1 \rightarrow E3 \rightarrow F2 \rightarrow G1 \rightarrow H2 \rightarrow I1 \rightarrow J2 \rightarrow K1 \rightarrow L2 \rightarrow K3 \rightarrow L4 \rightarrow K5 \rightarrow$   
 $\rightarrow L6 \rightarrow K7 \rightarrow L8 \rightarrow K9 \rightarrow L10 \rightarrow J8 \rightarrow I7 \rightarrow J6 \rightarrow I5 \rightarrow J4 \rightarrow I3 \rightarrow H4 \rightarrow G3 \rightarrow F4 \rightarrow$   
 $\rightarrow G5 \rightarrow F6 \rightarrow H8 \rightarrow G7 \rightarrow F8 \rightarrow H6$

Sobivaid käikude järjekordi leidub mitmeid. Piisab sellest, et käike sooritades läbitakse kõiki musta värvi ruute ning ei eksita reeglite vastu.

### **Hindamine:**

- a)
- Mainimine, et kui nupp on alguses ühes nurgas, siis käikude lõppedes peab olema nupp vastasnurgas 1p
- Põhjendamine, et igale ruudule, millele sisenetakse, tuleb ka väljuda (välja arvatud viimane ruut) 1p
- Näitamine, et ruudustikus leidub rohkem kui üks ruut, millele on võimalik siseneda, kuid millelt pole võimalik väljuda 1p
- Vastuolu tõlgendamine lõppvastuse näol 1p
- b)
- Õige lõppvastus koos näite või põhjendusega, millal selline käikude järjekord on võimalik; näitena võib tuua nii joonise kui ka koordinaatides kirjeldatud järjekorra. 3p
- 7p**

Märkus: Ainult õige vastuse eest 0p.